

2025 年“大梦杯”青少年数学水平测试参考答案

测试时间 2025 年 3 月 9 日 9:00—11:00 满分 150 分

一、选择题（共 5 小题，每小题 7 分，共 35 分）。每道小题均给出了代号为 A, B, C, D 的四个选项，其中有且只有一个选项是正确的。请将正确选项的代号填入题后的括号里，不填、多填或错填都得 0 分）

1. 已知 A, B, C 为反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 图象上的三点, D 为线段 AB 的中点, $CD \perp AB$, 若点 A, B 关于直线 $y = x$ 对称, 且 $CD = \sqrt{2}$, $AB = 6\sqrt{2}$, 则 $k =$ ()
A. 8 B. 12 C. 16 D. 36

【答案】 C

【解答】 因为反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称, 且点 A, B 关于直线 $y = x$ 对称, $CD \perp AB$,

所以点 C 在直线 $y = x$ 上, 设 $C(t, t)$, 则 $k = t^2$.

如图, 作等腰直角三角形 $\triangle ECD$ 和 $\triangle DFA$.

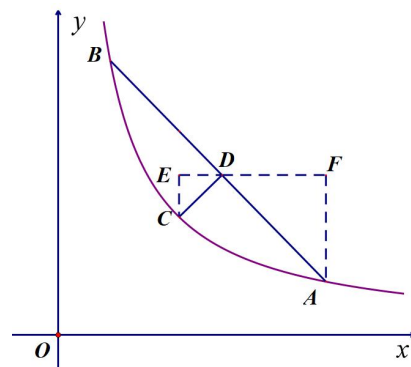
因为 $CD = \sqrt{2}$, $AB = 6\sqrt{2}$,

所以 $D(t+1, t+1)$, $A(t+1+3, t+1-3)$, 即 $A(t+4, t-2)$.

因为点 A 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上,

所以 $(t+4)(t-2) = k = t^2$.

解得 $t = 4$, 于是 $k = t^2 = 16$. 选 C.



(第 1 题答题图)

2. 方程 $\sqrt{3x^2 - 3x + 6} - \sqrt{3x^2 - 6x + 8} - 6x + 4 = 0$ ()
A. 无实数根 B. 有且仅有一个实数根
C. 有两个不同的实数根 D. 有三个不同的实数根

【答案】 B

【解答】 依题意原方程化为 $\sqrt{3x^2 - 3x + 6} - \sqrt{3x^2 - 6x + 8} = 6x - 4$.

所以 $\frac{(3x^2 - 3x + 6) - (3x^2 - 6x + 8)}{\sqrt{3x^2 - 3x + 6} + \sqrt{3x^2 - 6x + 8}} = 6x - 4$,

即 $\frac{3x - 2}{\sqrt{3x^2 - 3x + 6} + \sqrt{3x^2 - 6x + 8}} = 2(3x - 2)$.

所以 $3x - 2 = 0$, 即 $x = \frac{2}{3}$, 或 $\sqrt{3x^2 - 3x + 6} + \sqrt{3x^2 - 6x + 8} = \frac{1}{2}$.

因为 $\sqrt{3x^2 - 3x + 6} = \sqrt{3(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{21}{4}} \geq \frac{\sqrt{21}}{2}$, $\sqrt{3x^2 - 6x + 8} = \sqrt{3(x - 1)^2 + 5} \geq \sqrt{5}$,

所以 $\sqrt{3x^2 - 3x + 6} + \sqrt{3x^2 - 6x + 8} > \frac{1}{2}$, 即方程 $\sqrt{3x^2 - 3x + 6} + \sqrt{3x^2 - 6x + 8} = \frac{1}{2}$ 无实数解.

因此方程有且仅有一个实数根. 选 B.

3. 满足方程组 $\begin{cases} 2 \times 3^a + 3^b = 3^c \\ a+b=cd \end{cases}$ 的有序整数组 (a, b, c, d) 有 ()

- A. 2 组 B. 3 组 C. 4 组 D. 5 组

【答案】 C

【解答】若 $a \leq b$, 则 $3^b < 3^c = 2 \times 3^a + 3^b \leq 2 \times 3^b + 3^b = 3^{b+1}$, 于是 $b < c \leq b+1$, 结合 b, c 为整数知 $c = b+1$.

于是 $2 \times 3^a + 3^b = 3^{b+1}$, 由此可得 $a = b$, 于是 $a = b = c - 1$.

若 $a > b$, 则 $3^a < 3^c = 2 \times 3^a + 3^b < 2 \times 3^a + 3^a = 3^{a+1}$, 于是 $a < c < a+1$, 符合条件的整数 a, c 不存在, 故 $a > b$ 不成立.

综上可知, $a = b = c - 1$.

将 $a = b = c - 1$ 代入 $a + b = cd$, 得 $2c - 2 = cd$.

显然 $c \neq 0$, 于是 $d = 2 - \frac{2}{c}$.

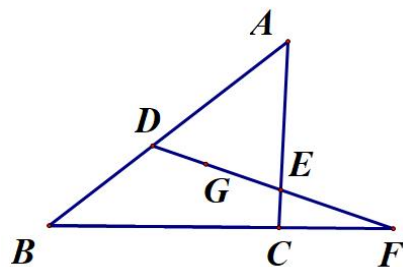
因为 c, d 为整数,

所以 $\begin{cases} c = -2 \\ d = 3 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} c = -1 \\ d = 4 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} c = 1 \\ d = 0 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} c = 2 \\ d = 1 \end{cases}$.

由此可得符合条件的有序整数组 (a, b, c, d) 为 $(-3, -3, -2, 3)$, $(-2, -2, -1, 4)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(1, 1, 2, 1)$, 共 4 组. 选 C.

4. 如图, G 为 $\triangle ABC$ 的重心, D, E, F 分别为过点 G 的直线与 $\triangle ABC$ 的边 AB, AC, BC 延长线的交点, 若 $CF = \frac{1}{2}BC$, 则 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比为 ()

- A. $\frac{16}{35}$ B. $\frac{9}{35}$ C. $\frac{5}{7}$ D. $\frac{3}{7}$



(第 4 题图)

【答案】 A

【解答】如图, 连接 AG 并延长交 BC 于点 M .

因为直线 DGF 交 $\triangle ABM$ 的边 AB, AM, BM 的延长线于点 D, G, F ,

所以由梅涅劳斯定理知 $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BF}{FM} \cdot \frac{MG}{GA} = 1$ ①.

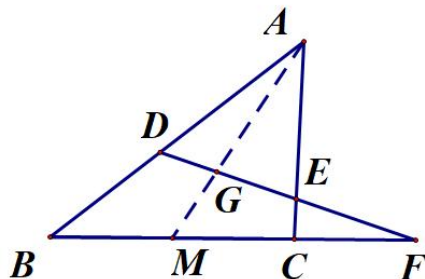
同理, 由直线 GEF 交 $\triangle AMC$ 的边 AM, AC, MC 的延长线于点 G, E, F , 得 $\frac{AG}{GM} \cdot \frac{MF}{FC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$ ②.

因为 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,

所以 M 为 BC 中点, 且 $\frac{MG}{GA} = \frac{1}{2}$, $\frac{AG}{GM} = \frac{2}{1}$.

又 $CF = \frac{1}{2}BC$,

所以 $BM = MC = CF$, $\frac{BF}{FM} = \frac{3}{2}$, $\frac{MF}{FC} = \frac{2}{1}$.



(第 4 题答题图)

将上述结论代入①, ②, 计算得 $\frac{AD}{DB} = \frac{4}{3}$, $\frac{CE}{EA} = \frac{1}{4}$.

所以 $\frac{AD}{AB} = \frac{4}{7}$, $\frac{AE}{AC} = \frac{4}{5}$.

设点 E , 点 C 到直线 AB 的距离分别为 d_E , d_C , 则 $\frac{d_E}{d_C} = \frac{AE}{AC} = \frac{4}{5}$.

所以 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot d_E}{\frac{1}{2}AB \cdot d_C} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{d_E}{d_C} = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{35}$. 选A.

5. 已知 $a > 0$, $b > 0$, $\min\left\{a, \frac{15}{a+1} + 2b, \frac{2}{b}\right\} = m$, 则 m 的最大值为 ()

A. 3 B. 4 C. $3+2\sqrt{2}$ D. $4+2\sqrt{2}$

(符号 $\min\{a, b, c\}$ 表示实数 a , b , c 中的最小者, 如 $\min\{-1, 1, \sqrt{2}\} = -1$, $\min\{1, 1, \sqrt{2}\} = 1$.)

【答案】 B

【解答】 依题意有 $m \leq a$, $m \leq \frac{2}{b}$.

因为 $a > 0$, $b > 0$,

所以 $m > 0$, $a+1 \geq m+1 > 0$, $b \leq \frac{2}{m}$.

因此 $m \leq \frac{15}{a+1} + 2b \leq \frac{15}{m+1} + \frac{4}{m}$.

结合 $m > 0$, 整理得 $m^3 + m^2 - 19m - 4 \leq 0$, 于是 $(m-4)(m^2 + 5m + 1) \leq 0$, 解得 $0 < m \leq 4$.

又 $a = 4$, $b = \frac{1}{2}$ 时, $m = 4$.

所以 m 的最大值为 4. 选B.

二、填空题 (共 5 小题, 每小题 7 分, 共 35 分)

6. 若实数 x , y 满足: $x^2 + \sqrt{5}y = 6$, $y^2 + \sqrt{5}x = 6$, 且 $x \neq y$, 则 $\frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{y} =$ _____.

【答案】 $-8\sqrt{5}$

【解答】 依题意有 $\begin{cases} x^2 + \sqrt{5}y = 6 \\ y^2 + \sqrt{5}x = 6 \end{cases}$.

两式相减, 得 $(x^2 - y^2) + \sqrt{5}(y - x) = 0$, 结合 $x \neq y$, 得 $x + y = \sqrt{5}$, $y = \sqrt{5} - x$.

将 $y = \sqrt{5} - x$ 代入①, 整理得 $x^2 - \sqrt{5}x - 1 = 0$.

同理 $y^2 - \sqrt{5}y - 1 = 0$.

于是 x , y 为关于 t 的方程 $t^2 - \sqrt{5}t - 1 = 0$ 的两个不同的实根,

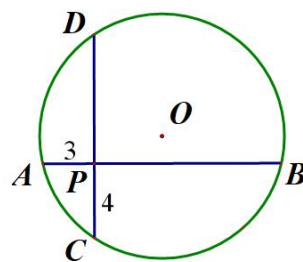
因此 $x + y = \sqrt{5}$, $xy = -1$.

所以

$$\frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{y} = \frac{x^3 + y^3}{xy} = \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{xy} = \frac{(x+y) \cdot [(x+y)^2 - 3xy]}{xy} = \frac{\sqrt{5} \cdot (5+3)}{-1} = -8\sqrt{5}.$$

7. 如图, 圆 O 的半径为 5, 两条互相垂直的弦 AB 与 CD 相交于点 P , 若 $PA=3$, $PC=4$, 则 $PB^2 + PD^2 =$ _____.

【答案】 75



(第 7 题图)

【解答】如图, 作 $OE \perp AB$ 于 E , $OF \perp CD$ 于 F , 记 $OE = d_1$, $OF = d_2$.

因为 $AB \perp CD$, 且 $PA=3$, $PC=4$,

所以 $AE = AP + PE = 3 + d_2$, $CF = CP + PF = 4 + d_1$.

因为圆 O 的半径为 5,

所以 $AE^2 + d_1^2 = 25$, $CF^2 + d_2^2 = 25$.

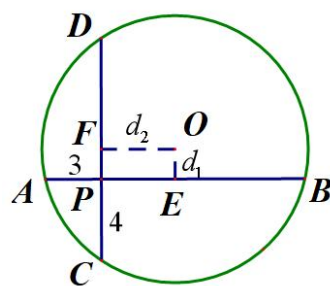
因此 $(3 + d_2)^2 + d_1^2 = 25$, $(4 + d_1)^2 + d_2^2 = 25$.

两式相加, 并整理得 $2d_1^2 + 2d_2^2 + 8d_1 + 6d_2 = 25$.

又因为 $PB = PE + EB = d_2 + AE = d_2 + (3 + d_2) = 3 + 2d_2$,

$PD = PF + FD = d_1 + CF = d_1 + (4 + d_1) = 4 + 2d_1$,

所以 $PB^2 + PD^2 = (3 + 2d_2)^2 + (4 + 2d_1)^2 = 2(2d_1^2 + 2d_2^2 + 8d_1 + 6d_2) + 25 = 50 + 25 = 75$.



(第 7 题答题图)

8. 设 a 是正整数, 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} |x| < 2a, \\ |x-a| < a + \frac{1}{2} \end{cases}$ 的所有整数解的和是 435, 则

$a =$ _____.

【答案】 15

【解答】题设不等式组化为 $\begin{cases} -2a < x < 2a, \\ -a - \frac{1}{2} < x - a < a + \frac{1}{2}. \end{cases}$

即 $\begin{cases} -2a < x < 2a, \\ -\frac{1}{2} < x < 2a + \frac{1}{2}. \end{cases}$

因为 a 是正整数,

所以不等式组的解为 $-\frac{1}{2} < x < 2a$.

于是不等式组的整数解为 $0, 1, 2, \dots, 2a-1$.

因此 $0+1+2+\dots+(2a-1) = a(2a-1) = 435$. 解得 $a=15$ 或 $a=-\frac{29}{2}$ (舍去).

所以 $a=15$.

9. 已知 a 为正整数, 若关于 x 的方程 $x^4 + (a+5)x^3 + (3a+10)x^2 - 4a - 16 = 0$ 有四个互不相同的整数根, 则 $a =$ _____.

【答案】 5

【解答】 因为 $x=1$ 时,

$$x^4 + (a+5)x^3 + (3a+10)x^2 - 4a - 16 = 1 + (a+5) + (3a+10) - 4a - 16 = 0.$$

$x=-2$ 时,

$$x^4 + (a+5)x^3 + (3a+10)x^2 - 4a - 16 = 16 - 8(a+5) + 4(3a+10) - 4a - 16 = 0.$$

所以 $x=1, x=-2$ 是方程的根.

所以 $(x-1)(x+2)$ 是多项式 $x^4 + (a+5)x^3 + (3a+10)x^2 - 4a - 16$ 的因式.

$$\text{由此可得 } x^4 + (a+5)x^3 + (3a+10)x^2 - 4a - 16 = (x-1)(x+2) [x^2 + (a+4)x + 2a+8].$$

依题意方程 $x^2 + (a+4)x + 2a+8 = 0$ 有两个不同的整数根.

设 x_1, x_2 为方程的两个整数根, 且 $x_1 < x_2$.

则 $x_1 + x_2 = -a-4, x_1 x_2 = 2a+8$, 消 a , 得 $2(x_1 + x_2) + x_1 x_2 = 0$.

于是 $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 4$.

又因为 a 为正整数, $(x_1 + 2) + (x_2 + 2) = -a < 0$, x_1, x_2 为整数, 且 $x_1 < x_2$,

$$\text{所以 } \begin{cases} x_1 + 2 = -4 \\ x_2 + 2 = -1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x_1 = -6 \\ x_2 = -3 \end{cases}.$$

因此 $-6 + (-3) = -a-4, a=5$, 此时方程的四个根为 $-6, -3, 1, -2$ 符合要求.

所以 $a=5$.

10. 若对任意不小于 m 的正整数 d , 总存在正整数 a, b, c , 使得: ① $1 < a < b < c < d$;

② $1+a+b, a+b+c, b+c+d$ 被 3 除的余数分别为 2, 1, 0, 则正整数 m 的最小值为 _____.

【答案】 10

$$\text{【解答】 依题意有 } \begin{cases} 1+a+b \equiv 2 \pmod{3} \cdots \cdots (1) \\ a+b+c \equiv 1 \pmod{3} \cdots \cdots (2) \\ b+c+d \equiv 0 \pmod{3} \cdots \cdots (3) \end{cases}$$

由 (2)-(1), 得 $c-1 \equiv -1 \pmod{3}$, 因此 $c \equiv 0 \pmod{3}$;

由 (2)-(3), 得 $a-d \equiv 1 \pmod{3}$, 因此 $a \equiv d+1 \pmod{3}$;

将 $a \equiv d+1 \pmod{3}$ 代入 (1), 得 $1+d+1+b \equiv 2 \pmod{3}$, 因此 $b \equiv -d \pmod{3}$.

$$\text{由上可得, } \begin{cases} a \equiv d+1 \pmod{3} \\ b \equiv -d \pmod{3} \\ c \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}.$$

$$(I) \text{ 若 } d \equiv 0 \pmod{3}, \text{ 则 } \begin{cases} a \equiv 1 \pmod{3} \\ b \equiv 0 \pmod{3} \\ c \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}, \text{ 使 } d \text{ 取最小值的符合条件的 } a, b, c, d$$

为 $(a, b, c, d) = (4, 6, 9, 12)$.

由此可知, $a=4+3k$, $b=6+3k$, $c=9+3k$, $d=12+3k$, k 为非负整数, 符合题中条件①, ②.

因此当 $d=12+3k$, k 为非负整数, 即 $d=12, 15, 18, \dots$ 时, 总存在符合题设条件的正整数 a, b, c .

$$(II) \text{ 若 } d \equiv 1 \pmod{3}, \text{ 则 } \begin{cases} a \equiv 2 \pmod{3} \\ b \equiv -1 \pmod{3} \\ c \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}, \text{ 使 } d \text{ 取最小值的符合条件的 } a, b, c, d$$

为 $(a, b, c, d) = (2, 5, 6, 7)$. 仿 (I) 可知, 当 $d=7+3k$, k 为非负整数, 即 $d=7, 10, 13, \dots$ 时, 总存在符合题设条件的正整数 a, b, c .

$$(III) \text{ 若 } d \equiv 2 \pmod{3}, \text{ 则 } \begin{cases} a \equiv 3 \equiv 0 \pmod{3} \\ b \equiv -2 \pmod{3} \\ c \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}, \text{ 使 } d \text{ 取最小值的符合条件的 } a, b, c,$$

d 为 $(a, b, c, d) = (3, 4, 6, 8)$. 仿 (I) 可知, 当 $d=8+3k$, k 为非负整数, 即 $d=8, 11, 14, \dots$ 时, 总存在符合题设条件的正整数 a, b, c .

综上, 当 $d \geq 10$ 时, 总存在符合题设条件的正整数 a, b, c .

因此 m 的最小值为 10.

三、解答题（共4题，每小题20分，共80分）

11. 已知二次函数 $y = x^2 + bx + c$ ($b < 0$) 的图象交 x 轴于 A, B 两点, 交 y 轴于 C 点, 且 $AB = 5$, 点 C 在 y 轴负半轴上, $\triangle ABC$ 的面积为10.

(1) 求 b, c 的值;

(2) 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} -1 \leq x \leq 5 \\ k \leq |x-4| + |x^2 + bx + c| \end{cases}$ 有解, 求实数 k 的最大值.

【解答】 (1) 设 $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$, 则 x_1, x_2 为方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的两根.

所以 $x_1 + x_2 = -b, x_1 x_2 = c$.

因为 $AB = 5$, 点 C 在 y 轴负半轴上, $\triangle ABC$ 的面积为10.

所以 $|x_1 - x_2| = AB = 5, x_1 x_2 = c < 0, OC = -c$, 且 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OC = \frac{1}{2} \times 5 \times (-c) = 10$.

于是 $c = -4, x_1 x_2 = c = -4, (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = (-b)^2 - 4 \cdot (-4) = 25$.

因此 $b^2 = 9$, 又 $b < 0$, 于是 $b = -3$.

所以 $b = -3, c = -4$.

(2) 设 $y = |x-4| + |x^2 + bx + c|$,

则由 (1) 知 $y = |x-4| + |x^2 - 3x - 4| = |x-4| + |(x-4)(x+1)|$.

设 $y = |x-4| + |(x-4)(x+1)|$ 在 $-1 \leq x \leq 5$ 上的最大值为 M , 下面求 M 的值.

当 $-1 \leq x \leq 4$ 时, $y = (4-x) - (x^2 - 3x - 4) = -(x-1)^2 + 9$, 在 $x=1$ 时取最大值9.

当 $4 < x \leq 5$ 时, $y = (x-4) + (x^2 - 3x - 4) = (x-1)^2 - 9$, 在 $x=5$ 时取最大值7.

因为 $9 > 7$,

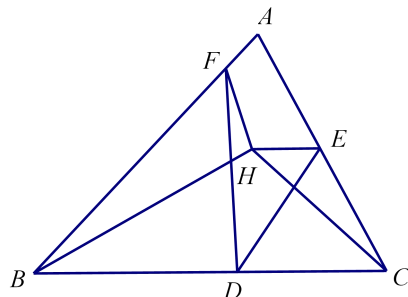
所以 $y = |x-4| + |(x-4)(x+1)|$ 在 $-1 \leq x \leq 5$ 上的最大值 $M = 9$.

因为关于 x 的不等式组 $\begin{cases} -1 \leq x \leq 5 \\ k \leq |x-4| + |x^2 + bx + c| \end{cases}$, 即 $\begin{cases} -1 \leq x \leq 5 \\ k \leq |x-4| + |x^2 - 3x - 4| \end{cases}$ 有解,

所以 $k \leq M$, 即 $k \leq 9$.

所以 k 的最大值为9.

12. 如图, H 为锐角 $\triangle ABC$ 的垂心, 点 D, E, F 分别在 $\triangle ABC$ 的边 BC, CA, AB 上, 使得 $DB = DF, DC = DE$. 求证: $\angle BHC = \angle EHF$.



(第 12 题图)

【证明】 如图, 延长 BH 交 CA 于点 H_2 , 延长 CH 交 AB 于点 H_3 . 则 $BH_2 \perp AC, CH_3 \perp AB$.

过点 D 分别作 CA, AB 的垂线, 垂足分别为 E_1, F_1 .
因为 $BH_2 \perp AC, DE_1 \perp AC, CH_3 \perp AB, DF_1 \perp AB$,
所以 $DE_1 \parallel BH_2, DF_1 \parallel CH_3$.

$$\text{所以 } \frac{CE_1}{CH_2} = \frac{CD}{CB}, \quad \frac{BF_1}{BH_3} = \frac{BD}{BC}.$$

又因为 $DB = DF, DC = DE$,
所以 E_1, F_1 分别为 CE, BF 的中点.

$$\text{所以 } \frac{H_2E}{CH_2} = \frac{CH_2 - CE}{CH_2} = \frac{CH_2 - 2CE_1}{CH_2} = 1 - 2 \times \frac{CE_1}{CH_2} = 1 - 2 \times \frac{CD}{CB},$$

$$\frac{H_3F}{BH_3} = \frac{BF - BF_1}{BH_3} = \frac{2BF_1 - BF_1}{BH_3} = 2 \times \frac{BF_1}{BH_3} - 1 = 2 \times \frac{BD}{BC} - 1 = 2 \times \frac{BC - CD}{BC} - 1 = 1 - 2 \times \frac{CD}{BC}.$$

$$\text{因此 } \frac{H_2E}{CH_2} = \frac{H_3F}{BH_3}. \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

因为 $\angle ACH = 90^\circ - \angle A = \angle ABH$,
所以 $Rt\triangle CH_2H \sim Rt\triangle BH_3H$.

$$\text{因此 } \frac{CH_2}{BH_3} = \frac{HH_2}{HH_3}. \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

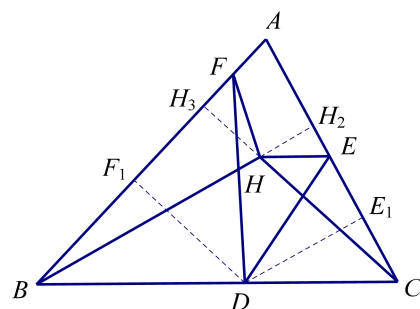
$$\text{又由 } \textcircled{1} \text{ 可知 } \frac{CH_2}{BH_3} = \frac{H_2E}{H_3F}, \text{ 再结合 } \textcircled{2}, \text{ 得 } \frac{HH_2}{HH_3} = \frac{CH_2}{BH_3} = \frac{H_2E}{H_3F}.$$

所以 $Rt\triangle HH_2E \sim Rt\triangle HH_3F$.

因此 $\angle EHH_2 = \angle FHH_3$.

$$\text{所以 } \angle EHF = \angle EHH_2 + \angle H_2HF = \angle FHH_3 + \angle H_2HF = \angle H_2HH_3.$$

因此 $\angle BHC = \angle H_2HH_3 = \angle EHF$.



(第 12 题答题图)

13. (1) 是否存在正整数 a, b , 使得 $(a+3b)(5a+7b)$ 是一个完全平方数? 若存在, 请写出一组符合条件的正整数 a, b ; 若不存在, 请说明理由;

(2) 是否存在正整数 a, b , 使得 $a^{2025} + b^{2025}$ 是一个奇数, 且 $(a+3b)(5a+7b)$ 是一个完全平方数? 若存在, 请写出一组符合条件的正整数 a, b ; 若不存在, 请说明理由.

【解答】 (1) 符合条件的正整数 a, b 存在.

当 $a=5, b=1$ 时, $(a+3b)(5a+7b)=8 \times 32=16^2$ 是一个完全平方数.

所以符合条件的正整数 a, b 存在, $a=5, b=1$ 是符合条件的一组正整数.

(2) 符合条件的正整数 a, b 不存在. 说明如下:

设存在正整数 a, b , 使得 $a^{2025} + b^{2025}$ 是一个奇数, 且 $(a+3b)(5a+7b)$ 是一个完全平方数.

设 $(a, b)=d$ (即 a, b 的最大公约数为 d), $a=md, b=nd$,

则 $(a+3b)(5a+7b)=d^2(m+3n)(5m+7n)$, 且 $(m, n)=1$.

因为 $(a+3b)(5a+7b)$ 是一个完全平方数,

所以 $(m+3n)(5m+7n)$ 也是一个完全平方数.

设 $(m+3n, 5m+7n)=d_1$.

因为 $a^{2025} + b^{2025}$ 是一个奇数,

所以 a, b 一奇一偶, m, n 也是一奇一偶.

因此 $m+3n, 5m+7n$ 均为奇数, 于是 d_1 为奇数.

因为 $d_1 \mid [5(m+3n)-(5m+7n)]$, 所以 $d_1 \mid 8n$, 于是 $d_1 \mid n$.

同理由 $d_1 \mid [3(5m+7n)-7(m+3n)]$, 得 $d_1 \mid 8m, d_1 \mid m$.

因此 $d_1 \mid (m, n), d_1=1$.

结合 $(m+3n)(5m+7n)$ 是完全平方数, 可得 $m+3n, 5m+7n$ 均为完全平方数.

设 $m+3n=x^2, 5m+7n=y^2$, 其中 x, y 为正整数, 且均为奇数.

将上面两式相减, 得 $4(m+n)=y^2-x^2$.

由于奇数的平方被 8 除余 1, 因此 y^2-x^2 为 8 的倍数.

因为 m, n 一奇一偶, 因此 $4(m+n)$ 不是 8 的倍数.

所以等式 $4(m+n)=y^2-x^2$ 不成立, 与 $4(m+n)=y^2-x^2$ 矛盾.

所以符合条件的正整数 a, b 不存在.

14. 从1, 2, 3, ..., 2025中取出 $2n$ 个不同的数组成 n 个数对 (a_1, b_1) , (a_2, b_2) , (a_3, b_3) , ..., (a_n, b_n) . 若 $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, $a_3 + b_3$, ..., $a_n + b_n$ 是 n 个两两不相等的数, 且均不超过2025, 求正整数 n 的最大值.

【解答】我们考虑 $(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n)$.

一方面

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &\leq 2025 + (2025 - 1) + (2025 - 2) + \cdots + [2025 - (n - 1)] = \frac{(4051 - n)n}{2}. \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n) &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n \\ &\geq 1 + 2 + 3 + \cdots + 2n = (2n + 1)n. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \frac{(4051 - n)n}{2} \geq (2n + 1)n.$$

$$\text{解得 } n \leq \frac{4049}{5}.$$

因此 $n \leq 809$.

又如下809个数对满足题意:

$$\begin{aligned} &(406, 1619), (407, 1617), (408, 1615), \cdots, (809, 813), \\ &(1618, 3), (1616, 4), (1614, 5), \cdots, (814, 405), \\ &(1, 810), (2, 811). \end{aligned}$$

所以 n 的最大值为809.