

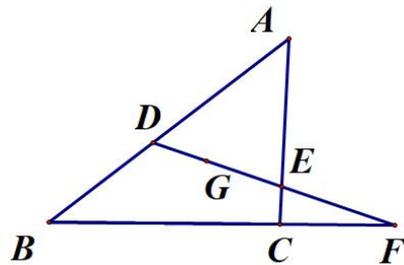


3. 满足方程组  $\begin{cases} 2 \times 3^a + 3^b = 3^c \\ a + b = cd \end{cases}$  的有序整数组  $(a, b, c, d)$  有 ( )

- A. 2组      B. 3组      C. 4组      D. 5组

4. 如图,  $G$  为  $\triangle ABC$  的重心,  $D, E, F$  分别为过点  $G$  的直线与  $\triangle ABC$  的边  $AB, AC, BC$  延长线的交点, 若  $CF = \frac{1}{2}BC$ , 则  $\triangle ADE$  与  $\triangle ABC$  的面积之比为 ( )

- A.  $\frac{16}{35}$       B.  $\frac{9}{35}$       C.  $\frac{5}{7}$       D.  $\frac{3}{7}$



(第4题图)

5. 已知  $a > 0, b > 0$ ,  $\min\left\{a, \frac{15}{a+1} + 2b, \frac{2}{b}\right\} = m$ , 则  $m$  的最大值为 ( )

- A. 3      B. 4      C.  $3 + 2\sqrt{2}$       D.  $4 + 2\sqrt{2}$

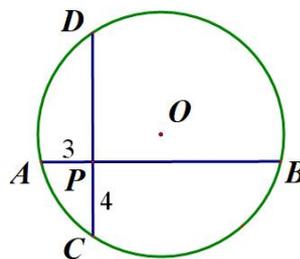
(符号  $\min\{a, b, c\}$  表示实数  $a, b, c$  中的最小者, 如  $\min\{-1, 1, \sqrt{2}\} = -1$ ,  $\min\{1, 1, \sqrt{2}\} = 1$ .)

## 二、填空题 (共5小题, 每小题7分, 共35分)

6. 若实数  $x, y$  满足:  $x^2 + \sqrt{5}y = 6$ ,  $y^2 + \sqrt{5}x = 6$ , 且  $x \neq y$ , 则

$$\frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{y} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

7. 如图，圆  $O$  的半径为 5，两条互相垂直的弦  $AB$  与  $CD$  相交于点  $P$ ，若  $PA=3$ ， $PC=4$ ，则  $PB^2 + PD^2 =$  \_\_\_\_\_.



(第 7 题图)

8. 设  $a$  是正整数，若关于  $x$  的不等式组  $\begin{cases} |x| < 2a, \\ |x-a| < a + \frac{1}{2} \end{cases}$  的所有整数解的和是 435，则  $a =$  \_\_\_\_\_.

9. 已知  $a$  为正整数，若关于  $x$  的方程  $x^4 + (a+5)x^3 + (3a+10)x^2 - 4a - 16 = 0$  有四个互不相同的整数根，则  $a =$  \_\_\_\_\_.

10. 若对任意不小于  $m$  的正整数  $d$ ，总存在正整数  $a, b, c$ ，使得：①  $1 < a < b < c < d$ ；②  $1+a+b, a+b+c, b+c+d$  被 3 除的余数分别为 2, 1, 0，则正整数  $m$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

**三、解答题（共 4 题，每小题 20 分，共 80 分）**

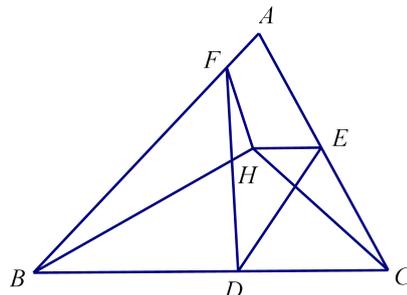
11. 已知二次函数  $y = x^2 + bx + c$  ( $b < 0$ ) 的图象交  $x$  轴于  $A, B$  两点, 交  $y$  轴于  $C$  点, 且  $AB = 5$ , 点  $C$  在  $y$  轴负半轴上,  $\triangle ABC$  的面积为 10.

(1) 求  $b, c$  的值;

(2) 若关于  $x$  的不等式组  $\begin{cases} -1 \leq x \leq 5 \\ k \leq |x-4| + |x^2 + bx + c| \end{cases}$  有解, 求实数  $k$  的最大值.

12. 如图,  $H$  为锐角  $\triangle ABC$  的垂心, 点  $D, E, F$  分别在  $\triangle ABC$  的边  $BC, CA, AB$  上, 使得  $DB = DF, DC = DE$ .

求证:  $\angle BHC = \angle EHF$ .



(第 12 题图)

13. (1) 是否存在正整数  $a, b$ , 使得  $(a+3b)(5a+7b)$  是一个完全平方数?  
若存在, 请写出一组符合条件的正整数  $a, b$ ; 若不存在, 请说明理由;
- (2) 是否存在正整数  $a, b$ , 使得  $a^{2025} + b^{2025}$  是一个奇数, 且  $(a+3b)(5a+7b)$  是一个完全平方数? 若存在, 请写出一组符合条件的正整数  $a, b$ ; 若不存在, 请说明理由.

14. 从 $1, 2, 3, \dots, 2025$ 中取出 $2n$ 个不同的数组成 $n$ 个数对 $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \dots, (a_n, b_n)$ . 若 $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots, a_n + b_n$ 是 $n$ 个两两不相等的数, 且均不超过 $2025$ , 求正整数 $n$ 的最大值.

# 稿 纸